Nichtlineare Feldtheorie

Von KARL BECHERT *

(Z. Naturforschg. 11 a, 177—182 [1956]; eingegangen am 30. Januar 1956)

Die in früheren Arbeiten (siehe Anmerkung [1]) entwickelte Feldtheorie läßt sich zwanglos in allgemein kovarianter Form schreiben im Sinn der allgemeinen Relativitätstheorie. Dabei spielt der Energie-Spannungs-Tensor Y^μ_ν der Arbeit II die Rolle des Materie-Tensors, er besteht aus dem MAXWELLschen Spannungstensor T^μ_ν und dem Tensor der Energie-Impuls-Strömung der Materie $U\,V^\mu V_\nu$, wo U ein Skalar ist, der mit der Ruhmassendichte zusammenhängt, und $V^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s$ die Vierergeschwindigkeit bedeutet; $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$. Aus den für die $g_{\mu\nu}$ geltenden Identitäten folgt der Energie-Impuls-Erhaltungssatz: die kovariante Divergenz von Y^μ_ν ist null. Dieser Erhaltungssatz spricht das Bewegungsgesetz der Materie aus und liefert für reines Schwerefeld geodätische Linien für die Bewegung der Materie. Der Ruhmassen-Skalar U ergibt sich allgemein als proportional zum Krümmungsskalar R. Bei der Bewegung längs der Weltlinien bleibt die spezifische Ladung konstant. Die EINSTEINschen Gravitationsgleichungen für den leeren Raum ergeben sich dann und nur dann, wenn kein elektromagnetisches Feld und keine Materie vorhanden sind. In der üblichen Näherung für schwache Felder und kleine Geschwindigkeiten gelten die Gesetze der klassischen Physik einschließlich der LORENTZschen Bewegungsgleichung; für hohe Geschwindigkeiten ergeben sich Abweichungen. Die Raumstruktur ist wesentlich durch das elektromagnetische Feld mitbestimmt. Eine Lösung wird angegeben, die zu einem Linienelement $\mathrm{d}s$ mit orthogonalen Kugelkoordinaten und nur von r abhängigen $g_{\mu\nu}$ gehört. Die Lösung entspricht formal einem punktförmigen ruhenden Teilchen endlicher Masse und Ladung; die Lösung ist nicht brauchbar, weil sie unendliche Feldenergie geben würde.

§ 1. Die leitenden Gedanken

In vorhergehenden Arbeiten [1] ist eine Feldtheorie entwickelt worden, die auf dem Gedanken beruht, daß es eine im Feld kontinuierlich verteilte Vierergeschwindigkeit

$$V^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s \tag{1.1}$$

gibt, daß also überall, wo Materie vorhanden ist, auch von dem Feld der Strömung dieser Materie gesprochen werden kann. $\mathrm{d}s$ ist das Linienelement im vierdimensionalen Raum, x^μ $(\mu = 1, \ldots, 4)$ der kontravariante Lagenvektor. Außerdem wird angenommen, daß es überall einen Energie-Impuls-Tensor Y^μ_ν gibt, für den ein Erhaltungssatz gilt. Seine vierdimensionale Divergenz ist null, die zeitliche Abnahme des Energie- oder Impulsinhaltes eines bestimmten Gebietes im dreidimensionalen Raum ist gleich der Strömung von Energie oder Impuls aus diesem Raumgebiet hinaus. Man kommt auf diese Formulierung durch die Forderung, daß die Kraft auf ein Raumgebiet $\mathrm{d}\tau_3$ sich als Impulsänderung schreiben lassen soll; zwangsläufig wird man so auf die Form $U\,V^\mu V_\nu$ für den Energie-Impuls-Tensor der Materie geführt. U ist eine Invariante, die mit der Ruhmasse zusammenhängt; es ist

$$-U\,V^4\,\mathrm{d}\tau_3/c^2$$

die in $\mathrm{d}\tau_3$ enthaltene Ruhmasse. Y^μ_ν hat die Form [2]:

$$Y^\mu_\nu = T^\mu_\nu + U\,V^\mu V_\nu. \tag{1.2}$$

Für T^μ_ν benutzen wir in dieser Arbeit wie in den früheren den MAXWELLschen Spannungstensor. Während die früheren Arbeiten sich mit der Kovarianz gegenüber LORENTZ-Transformationen begnügten, geben wir jetzt eine allgemein kovariante Formulierung der Gleichungen unserer Theorie.

Wir gehen aus von den EINSTEINschen Gravitationsgleichungen für den materieerfüllten Raum. Neu ist, daß wir für den Materietensor in EINSTEINS Gleichungen unseren Tensor Y^μ_ν verwenden. Das hat zur Folge, daß erstens sich der Erhaltungssatz für Y^μ_ν von selbst ergibt (§ 2 dieser Arbeit), und daß der Ruhmassen-Skalar U proportional zum Krümmungsskalar R des gekrümmten Raumes wird; die Raumkrümmung eines Gebietes ist also ein unmittelbares Maß für die in diesem Gebiet vorhandene Ruhmasse der Materie, ein erwünschtes Ergebnis, das für die Brauchbarkeit unseres Ansatzes spricht.

* Anschrift: Gau-Algesheim bei Mainz, Kloppgasse 6.

[1] Phys. Bl. **5**, 380 [1949]; Ann. Phys., Lpz. (6) **7**, 369 [1950] (Arbeit I); (6) **10**, 430 [1952] (Arbeit II); (6) **16**, 97 [1955] (Arbeit III).

[2] II, Gl. (2.6), S. 432.

Aus dem Viererstrom

$$S^\mu = C\, V^\mu \tag{1.3}$$

kann die Invariante

$$S^\mu S_\mu = C^2 \tag{1.4}$$

gebildet werden. Über gleiche Indizes in einem Produkt oder am gleichen Tensor ist stets zu summieren von 1 bis 4.

Mit U kann C kombiniert werden zu

$$i\, u = U/C\ ; \tag{1.5}$$

u ist einfach das Verhältnis der in einem $d\tau_3$ vorhandenen Ruhenergie zur Ladung dieses Gebietes. Eine einfache Rechnung zeigt, daß

$$du/ds = 0\,, \tag{1.6}$$

wenn $C \neq 0$. Die spezifische Ladung eines Gebietes $d\tau_3$ bleibt also bei der Wanderung dieses Gebietes erhalten. Außerdem läßt sich die Erhaltung der Ladung und der Ruhmasse für ein Raumgebiet zeigen.

Für V^μ gilt die Gleichung

$$V^\mu V_\mu = 1\,, \tag{1.7}$$

welche gleichbedeutend ist mit der Definition des Linienelementes ds (§ 2 dieser Arbeit; vgl. auch I, S. 373; II, S. 431).

Die allgemein kovariante Formulierung der Gleichungen hat den Vorteil gegenüber der nur LORENTZ-invarianten Formulierung, daß sie genau die richtige Anzahl von Gleichungen für die Unbekannten liefert.

§ 2. Die Gleichungen

Wir verwenden die kovariante Schreibweise der allgemeinen Relativitätstheorie. $g_{\mu\nu}$ ist der kovariante Fundamentaltensor, er ist symmetrisch in den Indizes; ds^2 ist das Abstandsquadrat im vierdimensionalen Raum, und es gilt:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu\ ; \tag{2.1}$$

wir sagten schon, daß über zweimal vorkommende Indizes zu summieren ist von 1 bis 4; x^μ ist der kontravariante Lagenvektor. Das Herauf- und Herunterziehen der Indizes geschieht durch Vorsetzen geeigneter kovarianter oder kontravarianter Faktoren $g_{\mu\nu}$ oder $g^{\mu\nu}$:

$$A^\lambda = g^{\lambda\mu} A_\mu\ ; \qquad A_\mu = g_{\mu\lambda} A^\lambda\,, \tag{2.2}$$

und es gilt:

$$g_{\mu\nu}\, g^{\mu\lambda} = g_\nu^\lambda\,, \tag{2.3}$$

wo g_ν^λ die Einheitsmatrix ist. Kovariante Differentiation nach x^μ bezeichnen wir durch den Strichpunkt, gewöhnliche Differentiation durch ein Komma, wir schreiben also für kovariante Differentiation des Tensors A_μ nach x^ν: $A_{\mu;\nu}$ und für gewöhnliche Differentiation $A_{\mu,\nu}$. Den RIEMANNschen Krümmungstensor nennen wir $R^\varkappa_{\mu\nu\lambda}$, seine Verjüngung[3] nach λ und $\varkappa$ ist der Tensor $R_{\mu\nu}$, und die Verjüngung von R^μ_ν nach μ und ν ist der Krümmungsskalar R.

Wir gehen aus von den EINSTEINschen Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie für den von Materie erfüllten Raum:

$$R^\mu_\nu - \tfrac{1}{2}\, g^\mu_\nu R = -\varkappa\, Y^\mu_\nu\ ; \tag{2.4}$$

$\varkappa$ ist eine universelle Konstante, Y^μ_ν der Materietensor, der bei EINSTEIN phänomenologisch eingeführt wird und von uns in dieser Arbeit gleich dem Tensor (1.2) gesetzt werden wird. Für die linke Seite von (2.4) gelten für jede beliebige Wahl der $g_{\mu\nu}$ die bekannten Identitäten:

$$(R^\mu_\nu - \tfrac{1}{2}\, g^\mu_\nu R)_{;\mu} = 0\,. \tag{2.5}$$

(2.5) hat den Erhaltungssatz

$$Y^\mu_{\nu;\mu} = 0 \tag{2.6}$$

zur Folge. Würde man Y^μ_ν mit dem MAXWELLschen Spannungstensor T^μ_ν identifizieren, so wäre materieerfülltes Gebiet mit (2.4) nicht beschreibbar, denn $T^\mu_{\nu;\mu} = 0$ gilt bekanntlich nur für das Vakuumfeld, in welchem der Viererstrom S^μ identisch null ist. Außerdem würde sich bei dieser Wahl von Y^μ_ν durch Verjüngung aus (2.4) $R = 0$ ergeben, was dann überall im Felde gelten müßte, auch dort, wo das elektromagnetische Feld nicht null ist. Es gilt nämlich allgemein:

$$T^\mu_\mu \equiv T = 0\,, \tag{2.7}$$

und

$$g^\mu_\mu \equiv g = 4\,. \tag{2.8}$$

In der Arbeit II ist gezeigt, daß der Tensor

$$U V^\mu V_\nu \equiv U^\mu_\nu \tag{2.9}$$

den Energie-Impuls-Tensor der Materie darstellt[4].

[3] In der Bezeichnungsweise der allgemeinen Relativitätstheorie heißt „Verjüngung eines Tensors“: 2 seiner Indizes gleichsetzen und über diese gleichen Indizes summieren.

[4] II, § 2, S. 432; vgl. auch III S. 99.

$$U \equiv U^{\mu}_{\mu} \tag{2.10}$$

ist der Ruhmassenskalar; in den Koordinaten der speziellen Relativitätstheorie, die in den früheren Arbeiten I bis III benutzt wurden, bedeutet, wie schon gesagt, $-UV^4\,\mathrm{d}\tau_3/c^2$ die in einem Raumgebiet $\mathrm{d}\tau_3$ des dreidimensionalen Raumes enthaltene Ruhmasse. V^{μ} ist der kontravariante Vektor der Vierergeschwindigkeit (1.1). Solange man V^{μ} durch (1.1) einführt, ist (1.7) eine Identität, denn die linke Seite dieser Gleichung bedeutet:

$$V^{\mu}\, g_{\mu\nu}\, V^{\nu} = g_{\mu\nu}\, \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s}\, \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}s}\,, \tag{2.11}$$

was wegen (2.1) identisch gleich Eins ist. Betrachtet man aber V^{μ} als Feldgröße, die aus den Feldgleichungen berechnet werden soll, so ist (1.7) eine Bedingung.

Wie schon angekündigt, identifizieren wir den Tensor Y^{μ}_{ν} allgemein mit dem Energie-Impuls-Tensor (1.2), wo T^{μ}_{ν} den MAXWELLschen Spannungstensor vorstellt. Ist $F^{\mu\alpha}$ der Feldstärkentensor des elektromagnetischen Feldes, so gilt:

$$T^{\mu}_{\nu} \equiv F^{\mu\alpha}\, F_{\nu\alpha} - \tfrac{1}{4}\, g^{\mu}_{\nu}\, F^{\lambda\alpha}\, F_{\lambda\alpha}\,; \tag{2.12}$$

für $T \equiv T^{\mu}_{\mu}$ gilt (2.7). (2.4) lautet demnach ausgeschrieben

$$R^{\mu}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\, g^{\mu}_{\nu}\, R = -\varkappa (T^{\mu}_{\nu} + U V^{\mu}\, V_{\nu})\,; \tag{2.13}$$

durch Verjüngen folgt allgemein

$$R = \varkappa\, U\,, \tag{2.14}$$

die Skalare der Raumkrümmung und der Ruhmassendichte sind einander proportional. Mit (2.14) wird aus (2.13)

$$R^{\mu}_{\nu} = \left(\tfrac{1}{2}\, g^{\mu}_{\nu} - V^{\mu}\, V_{\nu}\right) R - \varkappa T^{\mu}_{\nu}\,. \tag{2.15}$$

Der Erhaltungssatz (2.6) lautet jetzt

$$(\varkappa\, T^{\mu}_{\nu} + R\, V^{\mu}\, V_{\nu})_{;\mu} = 0 = \varkappa (T^{\mu}_{\nu} + U\, V^{\mu}\, V_{\nu})_{;\mu}\,; \tag{2.16}$$

er ist, wie gesagt, eine Folge der für die $g_{\mu\nu}$ geltenden Identitäten (2.5).

Für die Feldstärken des elektromagnetischen Feldes fordern wir die MAXWELLschen Gleichungen:

$$F^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} = S^{\mu}\,; \tag{2.17}$$

$$F_{\lambda\nu} \equiv \Phi_{[\nu;\lambda]} = \Phi_{[\nu,\lambda]}\,; \tag{2.18}$$

Φ_{ν} ist das Viererpotential, die Abkürzung $\Phi_{[\nu;\lambda]}$ ist erklärt durch

$$\Phi_{[\nu;\lambda]} \equiv \Phi_{\nu;\lambda} - \Phi_{\lambda;\nu}\,. \tag{2.19}$$

Für den Viererstrom gelten [5] (1.3) und (1.4), letzteres wegen (1.7). Aus (2.17), (2.18) folgt in bekannter Weise:

$$F_{\lambda\nu;\sigma} + F_{\nu\sigma;\lambda} + F_{\sigma\lambda;\nu} = 0 \tag{2.20}$$

und

$$-F_{\nu\mu}\, S^{\mu} = T^{\mu}_{\nu\,;\,\mu}\,. \tag{2.21}$$

Der Viererstrom S^{μ} kann wegen (1.3) und (1.7) nur dann null sein, wenn $C=0$; dann ist auch $T^{\mu}_{\nu;\mu}=0$, aber R und damit U kann nach (2.16) durchaus von null verschieden sein. In den Gleichungen steckt also die Möglichkeit ungeladener Teilchen ohne elektromagnetisches Feld, und es gibt auch die Möglichkeit ungeladener Teilchen ($C=0$, $U \neq 0$) bei gleichzeitigem Vorhandensein eines elektromagnetischen Feldes (nicht alle $F_{\lambda\nu}$ gleich null, also auch nicht alle T^{μ}_{ν} gleich null).

Wenn kein elektromagnetisches Feld da ist und keine Materie, so ergeben sich die EINSTEINschen Gravitationsgleichungen für den leeren Raum, wie es sein muß. Dann ist nämlich $T^{\mu}_{\nu}=0$, $R=0$ und wegen (2.15) auch $R^{\mu}_{\nu}=0$.

Andererseits kommen diese EINSTEINschen Gleichungen auch wirklich nur dann heraus, wenn kein elektromagnetisches Feld und keine Materie vorhanden sind; denn $R^{\mu}_{\nu}=0$ hat zur Folge $R=0$, und wegen (2.14), (2.15) auch $U=0$ und $T^{\mu}_{\nu}=0$. Das Letztere gibt aber: $F_{\lambda\nu}=0$ für reelle Feldstärken, wie man erkennt, wenn man im lokalen Bezugssystem, das ja bei eindeutigen $g_{\mu\nu}$ immer GALILEIsch gewählt werden kann, die Gleichungen $T^{\mu}_{\nu}=0$ zu erfüllen sucht. *Die* EINSTEINschen *Gravitationsgleichungen* $R^{\mu}_{\nu}=0$ *des leeren Raumes gelten also dann und nur dann, wenn weder ein elektromagnetisches Feld noch Materie vorhanden sind.* Wir bemerken außerdem, daß nach (2.14) bis (2.17) das Schwerefeld wesentlich mitbestimmt wird durch das elektromagnetische Feld und den Ruhmassenskalar U.

Das Gleichungssystem der hier vorgeschlagenen Theorie besteht also aus den Gln. (2.15), (2.17), (2.20), (1.7). (2.15) sind 9 Gln., weil die Spur der Matrizen auf beiden Seiten der Gleichung denselben Wert hat; (2.20) sind 3 Gln., denn die vierte Gl. ist nur eine „Anfangsbedingung“ in der Koordinate, nach welcher in der vierten Gl. nicht differenziert wird. S^{μ} ist in (1.3) erklärt. Wir haben also $9+4+3+1=17$ Gleichungen für die 21 Unbekann-

[5] Siehe I, S. 373; II, S. 431.

ten: $g_{\mu\nu}$, $F^{\nu\alpha}$, $V^{\mu}C$. Es bestehen die 4 Identitäten (2.5), welche dafür sorgen, daß in den $g_{\mu\nu}$ die Freiheit erhalten bleibt, welche für die willkürliche Wählbarkeit der Koordinatensysteme gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie notwendig ist. Wir haben damit genau so viel Gleichungen, wie zur Bestimmung der unbekannten Größen nötig sind.

Es scheint mir sehr befriedigend, daß die Bewegungsgleichung (2.16) für die Materie eine *Folge* unseres Gleichungssystems ist, und daß der Krümmungsskalar sich einfach proportional zum Ruhmassenskalar ergibt.

§ 3. Erhaltungssätze

Aus (2.21) folgt nach Multiplikation mit V^{ν} wegen (1.3), (1.7) und (2.16):

$$0 = T^{\mu}_{\nu\,;\,\mu} V^{\nu} = -(U V^{\mu} V_{\nu})_{;\,\mu} V^{\nu}. \tag{3.1}$$

Wegen (1.7) gilt

$$\begin{aligned} V^{\lambda}{}_{;\,\mu} V_{\lambda} &= -V^{\lambda} V_{\lambda;\,\mu} = -g^{\lambda\alpha} V_{\alpha} g_{\lambda\sigma} V^{\sigma}{}_{;\,\mu} \\ &= -g^{\alpha}{}_{\sigma} V_{\alpha} V^{\sigma}{}_{;\,\mu} = -V_{\lambda} V^{\lambda}{}_{;\,\mu} = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

denn der kovariante Differentialquotient der $g_{\mu\nu}$ ist identisch null. So kommt aus (3.1)

$$(U V^{\mu})_{;\,\mu} = 0. \tag{3.3}$$

Für die Gebiete, in denen $C \neq 0$, läßt sich die Invariante (1.5) bilden; für reelle Vorgänge ist u reell, weil U reell ist und C rein imaginär[6]. u bedeutet, wie schon angegeben, das Verhältnis der in einem räumlichen Gebiet $d\tau_3$ vorhandenen Ruhenergie zur darin enthaltenen Ladung; denn in einem GALILEIschen Bezugssystem ist, wenn ϱ die Ladungsdichte bedeutet,

$$u = \frac{-U\, V_4\, d\tau_3}{-i\, C\, V_4\, d\tau_3} = \frac{-U\, V_4\, d\tau_3}{\varrho\, d\tau_3} = \frac{dm_0\, c^2}{de}. \tag{3.4}$$

(3.3) läßt sich umformen in

$$(u S^{\mu})_{;\,\mu} = 0 = u_{,\,\mu} S^{\mu}. \tag{3.5}$$

Denn für den Viererstrom gilt der Erhaltungssatz

$$S^{\mu}{}_{;\,\mu} = 0, \tag{3.6}$$

der eine Folge von (2.17) ist. Setzt man (1.3) ein und berücksichtigt (1.1), so bedeutet (3.5) auch

$$u_{,\,\mu} \frac{dx^{\mu}}{ds} = \frac{du}{ds} = 0. \tag{3.7}$$

u bleibt also längs den Weltlinien geladener Materie konstant. Der Schluß gilt nur, wenn C von null verschieden ist.

Dagegen gilt (3.3) auch dann noch, wenn $C = 0$; es ist ebenfalls ein Erhaltungssatz. Man erkennt dies, wenn man Koordinaten benutzt, für welche die Determinante Δ der $g_{\mu\nu}$

$$\Delta \equiv \| g_{\mu\nu} \| \tag{3.8}$$

den Wert 1 hat. Dann lautet (3.3) einfach

$$(U V^{\mu})_{,\,\mu} = 0 \tag{3.9}$$

und gibt nach Integration über ein dreidimensionales Volumen die Aussage, daß

$$\frac{\partial}{\partial x^4} \int U V^4\, d\tau_3 = -\int U \vec{V}_{n}\, d\sigma, \tag{3.10}$$

wo $\vec{V}$ den dreidimensionalen Anteil der Vierergeschwindigkeit bedeutet, n seine Normalkomponente anzeigt, positiv nach außen aus dem Raumgebiet gezählt, und $d\sigma$ das Oberflächenelement dieses Raumgebietes bedeutet. Das Integral rechts in (3.10) stellt demnach die Strömung der Ruhmasse aus dem betrachteten Raumgebiet hinaus dar. (3.10) spricht die Erhaltung der Ruhmasse aus, (3.6) die Erhaltung der Ladung.

Dagegen geben die Gln. (2.16), geschrieben in Koordinaten, für welche $\Delta = 1$ ist

$$Y^{\mu}_{\nu\,,\,\mu} = \begin{Bmatrix} \mu\,\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} Y^{\mu}_{\alpha}, \tag{3.11}$$

wenn die geschweiften Klammern die CHRISTOFFEL-Symbole bedeuten

$$\begin{Bmatrix} \mu\,\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} \equiv \tfrac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\nu\lambda,\,\mu} + g_{\mu\lambda,\,\nu} - g_{\mu\nu,\,\lambda}). \tag{3.12}$$

Aus (3.11) entsteht:

$$Y^{\mu}_{\nu\,,\,\mu} = g_{\mu\lambda,\,\nu} Y^{\mu\lambda}. \tag{3.13}$$

Der Erhaltungssatz (2.16) bedeutet also, daß die zeitliche Änderung von Impuls und Energie in einem Raumgebiet nicht nur durch die Impuls- und Energie-Strömung durch den Rand dieses Gebietes geliefert wird, sondern noch durch das weitere Glied

$$\tfrac{1}{2} \int g_{\mu\lambda,\,\nu} Y^{\mu\lambda}\, d\tau_3,$$

das beim Vorhandensein eines Gravitationsfeldes von null verschieden ist. Mit anderen Worten: die LORENTZsche Bewegungsgleichung gilt in hinreichend starken elektromagnetischen und Materiefeldern nicht mehr; denn die $g_{\mu\lambda}$ werden gemäß (2.15) auch durch das herrschende elektromagnetische Feld bestimmt. Wir leiten jetzt die Bewegungsgleichung streng ab.

[6] Siehe II, S. 433; I, Gl. (3.8), S. 373.

§ 4. Bewegungsgesetz

(2.16) gibt wegen (2.21) und (3.3) der Reihe nach

$$U\,V^\mu\,V_{\nu;\mu} = -T^\mu_{\nu;\mu} = F_{\nu\mu}\,S^\mu\,; \qquad (4.1)$$

oder nach Multiplikation mit $g^{\alpha\nu}$

$$U\,V^\mu\,V^\alpha_{\ ;\mu} = F^\alpha_\mu\ S^\mu\,. \qquad (4.2)$$

Die linke Seite von (4.2) hat eine einfache Bedeutung. Es ist

$$V^\mu\,V^\alpha_{\ ;\mu} = V^\mu\,V^\alpha_{\ ,\mu} + \left\{ \begin{matrix} \nu\ \mu \\ \alpha \end{matrix} \right\} V^\mu\,V^\nu = \frac{dV^\alpha}{ds} + \left\{ \begin{matrix} \nu\ \mu \\ \alpha \end{matrix} \right\} V^\mu\,V^\nu$$

$$= \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \nu\ \mu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{dx^\mu}{ds}\,\frac{dx^\nu}{ds}\,. \qquad (4.3)$$

Wenn dieser Ausdruck null ist, so liefert er die Gleichung der geodätischen Linien. Das heißt nach (4.1): Wenn die LORENTZ-Kraft null ist, bewegt sich die Materie auf geodätischen Linien. Dies gilt immer dann, wenn ein ladungsfreies elektromagnetisches Feld und Materie vorhanden sind. In der EINSTEINschen Gravitationstheorie dagegen war es nicht möglich, das Bewegungsgesetz explizit aufzustellen, und es war nicht allgemein *bewiesen*, daß materielle Körper sich im reinen Schwerefeld auf geodätischen Linien bewegen.

Allgemein gilt

$$U\left[\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu\ \nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{dx^\mu}{ds}\,\frac{dx^\nu}{ds}\right] = F^\alpha_\mu\,S^\mu\,; \qquad (4.4)$$

dies ist das nach unserer Theorie strenggültige Bewegungsgesetz der Materie. Wenn $C \neq 0$, kann man wegen (1.5) links U ersetzen durch u, wenn man statt der rechten Seite schreibt: $-i\,F^\alpha_\mu\,V^\mu$; es ist nach (3.7): $du/ds = 0$.

Wir betrachten den Fall, daß es sich um *schwache, praktisch zeitlich unveränderliche Schwerefelder* handelt, und daß die *Materiegeschwindigkeiten klein gegen die Lichtgeschwindigkeit c* sind, so daß wir nur Glieder 1. Ordnung in v/c beibehalten. Die $g_{\mu\nu}$ haben dann die Werte $\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}$, wo $\delta_{\mu\nu}$ das KRONECKER-Symbol ist (1 für $\mu = \nu$, 0 sonst) und die $\varepsilon_{\mu\nu}$ kleine Größen 1. Ordnung sind; zeitliche Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ werden vernachlässigt. dx^μ/ds ist klein von 1. Ordnung für $\mu \neq 4$, $dx^4/ds \approx 1$ bis auf kleine Glieder 2. Ordnung; außerdem ist $g^{\mu\nu} \approx \delta_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}$. Aus (4.4) wird für $\alpha \neq 4$:

$$u\left[-\frac{1}{c^2}\,\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} 4\ 4 \\ \alpha \end{matrix} \right\}\right] \approx -i\,F^\alpha_\mu\,V_\mu,\ \alpha \neq 4\,; \quad (4.5)$$

das heißt

$$\frac{u}{c^2}\,\ddot{\mathfrak{r}} \approx -\frac{u}{2}\,\mathrm{grad}\,g_{44} + \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{H}\right]; \qquad (4.6)$$

$\mathfrak{r}$ ist der dreidimensionale Lagenvektor, $\mathfrak{v}$ die dreidimensionale Geschwindigkeit.

Nach (3.4) hat u die Bedeutung von $dm_0\,c^2/de$; *also spielt in dieser Näherung* $\frac{1}{2}\,c^2\,g_{44}$ *die Rolle des Gravitationspotentials,* und (4.6) ist genau die nichtrelativistische Bewegungsgleichung für ein Teilchen der Masse dm_0 und der Ladung de unter den Einwirkungen der Schwerkraft und eines elektromagnetischen Feldes mit den Feldstärken $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$. In dieser Näherung werden dm_0 und de als kleine Störung des Feldes der $g_{\mu\nu}$ und $F^{\alpha\mu}$ angesehen. Die 4. Komponente der Bewegungsgleichung (4.1) gibt in dieser Näherung den Energiesatz, der auch unmittelbar aus (4.6) durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{v}$ erhalten werden kann. Bei dieser Komponente von (4.1) ist Entwicklung bis zu Gliedern 2. Ordnung nötig, wie man leicht einsieht.

Für *hohe Geschwindigkeiten und schwache Felder* würde sich aus (4.1) die LORENTZsche Bewegungsgleichung sogar genau ergeben, wenn man die Glieder weglassen dürfte, die davon herrühren, daß die $g_{\mu\nu}$ nicht die GALILEIschen Werte ($g_{\mu\nu} = 1$ für $\mu = \nu$, sonst null) haben. Daß eine solche Vereinfachung aber nicht erlaubt ist, zeigt Gl. (2.15). Die Raumkrümmung ist eben in dieser Theorie durch das elektromagnetische Feld ganz wesentlich mitbestimmt.

Natürlich gehen in den hier betrachteten Näherungen auch die das elektromagnetische Feld beschreibenden Gln. (2.17), (2.18) in die Form der MAXWELLschen Theorie über samt den daraus folgenden Beziehungen (2.20), (2.21), (2.12).

§ 5. Lösungen

Aus der Tatsache, daß von unserem Gleichungssystem für den Fall des materie- und feldfreien Raumes nur die EINSTEINschen Gleichungen $R^\mu_\nu = 0$ übrig bleiben, folgt, daß alle Lösungen dieser Gleichungen zugleich Lösungen unseres Gleichungssystems sind. Also ist z. B. das SCHWARZSCHILDsche Linienelement Lösung unserer Gleichungen.

Macht man den Ansatz: (5.1)

$$ds^2 = h(r)\,dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 + f(r)\,(i\,c\,dt)^2,$$

so gibt es für diesen Typ von ds^2 nur eine einzige kugelsymmetrische, von der Zeit unabhängige Lösung unseres Gleichungssystems. Für sie gilt $R = 0$, mithin auch $U = 0$. Die SCHWARZSCHILDsche Lösung hat diese zuletzt genannten Eigenschaften auch, und unsere Lösung geht in die SCHWARZSCHILDsche beim Verschwinden des elektromagnetischen Feldes über.

Eine längere Rechnung gibt:

$$ds^2 = \frac{1}{f} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + f(r) \cdot (i\, c\, dt)^2;$$

$$f = 1 - \frac{k}{r} - \frac{\varkappa a^2}{2 r^2}; \qquad (5.2)$$

r, ϑ, φ sind räumliche Kugelkoordinaten, k und a Konstanten. Es ist nur F^{41} von null verschieden, bedeutet die mit i multiplizierte Radialkomponente der elektrischen Feldstärke und hat den Wert

$$F^{41} = a/r^2. \qquad (5.3)$$

Es ist $C = 0$ und

$$T_1{}^1 = -T_2{}^2 = -T_3{}^3 = T_4{}^4 = \tfrac{1}{2}(F^{41})^2; \qquad (5.4)$$

alle anderen T^μ_ν sind null. Außerdem ist

$$R_1{}^1 = -R_2{}^2 = -R_3{}^3 = R_4{}^4 = -\varkappa T_1{}^1; \quad R = 0; \quad U = 0, \qquad (5.5)$$

und

$$V^4 = 1/\sqrt{f}; \quad V_4 = \sqrt{f}, \qquad (5.6)$$

alle anderen V^μ sind null. Für $a = 0$ geht die Lösung (5.2) in die SCHWARZSCHILDsche über.

Die gesamte elektromagnetische Energie $-\int T_4{}^4\, d\tau_3$ divergiert hier wie $(1/r)_{r\to 0}$, dasselbe gilt für die Gesamtenergie $-\int Y_4{}^4\, d\tau_3$. Die Lösung ist für $a \neq 0$ nicht brauchbar, aber auch die SCHWARZSCHILDsche Lösung gibt für $r = k$ physikalisch unsinnige Aussagen[7].

Geht man in (2.15) zur Näherung schwacher, praktisch zeitlich unveränderlicher Gravitationsfelder und kleiner Geschwindigkeiten über, so ergibt sich die NEWTONsche *Näherung*, wenn kein elektromagnetisches Feld vorhanden ist. Für $\mu = \nu = 4$ wird nämlich aus (2.15)

$$\tfrac{1}{2} \Delta g_{44} \approx -\tfrac{1}{2} R - \varkappa T_{44} = -\tfrac{1}{2}\varkappa (U + 2 T_{44}). \qquad (5.7)$$

Es ist aber $-U \approx -U V_4$ die Ruheenergiedichte $\varrho_m c^2$, wenn ϱ_m die Materiedichte bedeutet. Nennen wir das Schwerepotential Φ, so ist nach § 4

$$\Phi \approx \tfrac{1}{2} c^2 g_{44}, \qquad (5.8)$$

folglich wegen (5.7)

$$\Delta\Phi \approx \tfrac{1}{2}\varkappa c^4 \varrho_m - \varkappa c^2 T_{44}. \qquad (5.9)$$

Also hängt die NEWTONsche Gravitationskonstante G mit $\varkappa$ zusammen durch[8]

$$\varkappa = 8\pi G/c^4, \qquad (5.10)$$

und (5.9) geht für verschwindendes elektromagnetisches Feld in die POISSON-Gleichung der NEWTONschen Mechanik über. Die Lösung von (5.9) ist

$$\Phi(P) = -G \int \frac{\varrho_m(Q)}{r_{PQ}} d\tau_Q - \frac{2G}{c^2} \int \frac{W(Q)}{r_{PQ}} d\tau_Q, \qquad (5.11)$$

wenn $W = -T_{44}$ die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist.

Bemerkenswert ist, daß auch die FRIEDMAN-LEMAÎTREsche Lösung der EINSTEINschen Theorie eine strenge Lösung unserer Gleichungen ist. Setzen wir an:

$$ds^2 = L^2(t)\,[(dx^1)^2 + \sin^2 x^1 (dx^2)^2 + \sin^2 x^1 \sin^2 x^2 (dx^3)^2] + (dx^4)^2; \qquad (5.12)$$

$x^4 = i\,c\,t$, so ergibt sich mit der Abkürzung $L' \equiv L_{,4}$:

$$R_1{}^1 = R_2{}^2 = R_3{}^3 = \frac{L''}{L} + 2\frac{L'^2}{L^2} - \frac{2}{L^2}; \quad R_4{}^4 = 3\frac{L''}{L}; \quad R = 6\left(\frac{L''}{L} + \frac{L'^2}{L^2} - \frac{1}{L^2}\right). \qquad (5.13)$$

Die Feldgleichungen (2.15) unserer Theorie geben dann zwangsläufig, wenn wir $F^{\mu\alpha} \equiv 0$ setzen, wie es für ein Modell des Weltalls gemäß ist:

$$V^1 = V^2 = V^3 = 0; \quad V^4 = V_4 = 1, \qquad (5.14)$$

und es ergibt sich als einzige Bedingung für L genau die FRIEDMAN-LEMAÎTREsche Gleichung:

$$\frac{2L''}{L} + \frac{L'^2}{L^2} - \frac{1}{L^2} = 0, \qquad (5.15)$$

die auf

$$L'^2 = 1 - \frac{A}{L}; \left(\frac{dL}{dt}\right) \cdot \frac{1}{c^2} = \frac{A}{L} - 1; \quad L \leqq A \qquad (5.16)$$

führt. Der Unterschied zur EINSTEINschen Theorie besteht darin, daß bei uns Materiegeschwindigkeit V^α und Materiedichte ϱ_m zwangsläufig durch das Feld bestimmt werden. Man findet:

$$\varkappa \varrho_m = -\frac{\varkappa U V^4}{c^2} = -\frac{R}{c^2} = \frac{3A}{c^2 L^3}, \qquad (5.17)$$

wieder genau wie bei FRIEDMAN-LEMAÎTRE.

§ 6. Schlußbemerkungen

Die hier dargestellte Theorie hat jedenfalls bemerkenswerte Eigenschaften: sie stimmt für den materiefreien Raum mit der EINSTEINschen Theorie überein; der Krümmungsskalar ist allgemein dem Ruhmassenskalar proportional; bei der Bewegung längs der Weltlinien bleibt die spezifische Ladung konstant; es läßt sich das strenge Bewegungsgesetz für die Materie explizit anschreiben; die Bewegung geschieht längs geodätischen Linien, wenn die LORENTZ-Kraft null ist; es gelten die Gleichungen der klassischen Physik in erster Näherung.

Weitere Untersuchung wird zeigen müssen, ob diese Theorie einen Beitrag zur Beschreibung der Elementarteilchen liefern kann.

[7] Vergleich mit der NEWTONschen Näherung zeigt bekanntlich, daß $k > 0$ sein muß.

[8] Unser $\varkappa$ unterscheidet sich vom EINSTEINschen um den Faktor $1/c^2$, wie schon (2.15) zeigt.